Symbolic Thinkingに基づく教材作成と数学の理解 (数式処理と教育)

山下, 哲; 高遠, 節夫

数理解析研究所講究録
第 1735 巻 2011 年 173-180

Making Materials based on Symbolic Thinking and Mathematical Understanding (Symbolic Thinkingに基づく教材作成と数学の理解)

木更津工業高等専門学校・基礎学系　山下　哲 (Satoshi Yamashita)
Fuculty of Fundamental Research,
Kisarazu National College of Technology
東邦大学・薬学部　高遠　節夫 (Setsuo Takato)
Fucluty of Pharmaceutical Science,
Toho University

1　はじめに

KETpic は数式処理システム (Computer Algebra System, 略して CAS) に付属するマクロパッケージであり，CAS の計算機能を生かしつつ，LaTeX 文書中に正確で美しい図を手軽に挿入するためのものである．2006 年にはじめて Maple 版 KETpic が開発され（[2], [10]），現在では，Mathematica 版，Maxima 版，Risa/Asir 版，Scilab 版，Matlab 版，R 版が開発されている（[3]）．KETpic を用いて作成された描画には以下の特徴がある．

- モノクロ・線画である（図 1 参照）．
- 正確で表現に富んでいる．
- 平面図形だけでなく，立体図形の投影図も描画できる（図 2 参照）．

以上のことから，KETpic は数学教育用図入り配付教材の作成に適している（[4], [5], [6], [7], [11]）．各 CAS 版 KETpic のパッケージは

http://ketpic.com/

より無料でダウンロード可能である．

KETpic は次の手順（KETpic Cycle）で利用できる（図 3 参照）．

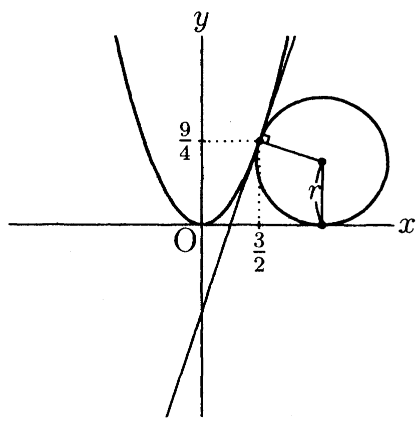

図 1．平面図形の描画

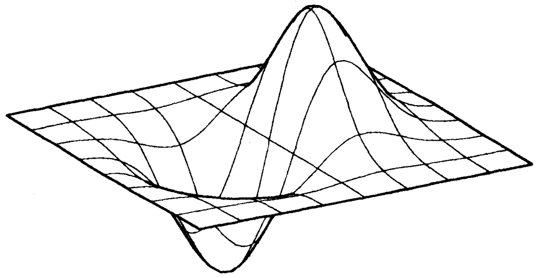

図 2．空間図形の描画

(I) CASを立ち上げ，KETpicを読み込み，描画のプロットデータ（Plot Data）を作成する.

(II) KETpicを用いて，プロットデータからLaTeX用描画コード（Tpic specials）を生成し，図ファイル（Figure file）に書き出す.

(III) LaTeX コマンド¥input により，LaTeX 文書（LaTeX document）に図ファイルを挿入する.

(IV) LaTeX をコンパイルし，プレビューアー（Dvi またはPDF）で確認する. 修正があれば，CAS に戻り，(I) から作業を繰り返す.

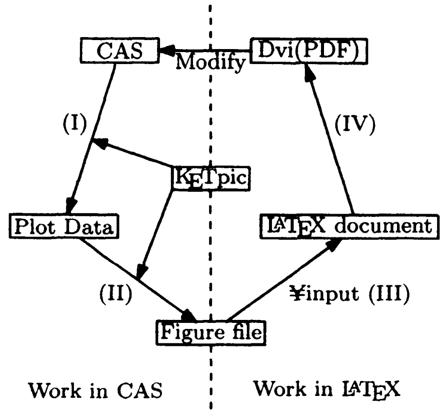

図3. KETpic Cycle

本論文では，Scilab版KETpicを用いて，教材作成という視点から，KETpicへのSymbolic Thinkingの適用や，それによる数学の理解との関わりについて論じる.

2 CASとScilabの比較–教材作成の視点から–

Scilabは，本来のCASではなく，数値計算（Numerical Computation）や2D&3Dグラフィックスの能力は有しているが，数式処理（Symbolic Calculation）の能力はない（表1参照）. しかし，KETpicを付属するには十分な能力を有している. 数式処理の主な能力には以下の2つがある.

- 数式を代数的に処理する能力（Symbolic Manipulations）
- 数式を象徴記号として表象する能力（Symbolic Representation）

教材作成をする際，ユーザーに利用しやすいKETpicの環境を構築するためには，数式処理の能力すべてが必要であるとこれまで考えられていた. しかし，最近，ユーザーがSymbolic Thinklingできる能力を備えていれば，ユーザーに利用しやすいKETpicの環境として十分であることがわかってきた（Symbolic Thinkingの定義は次節で与える）.

CAS	Scilab
Numerical Computation	Numerical Computation
Symbolic Calculation	×
2D & 3D Graphics	2D & 3D Graphics

表1. CASとScilabの違い

ユーザーがSymbolic Thinkingできる能力としては，上記2つの能力のうち，「数式を象徴記号として表象する能力」である．この能力を付加するには，KETpic コマンドの表象で十分対応できるため，Scilab 本体に何かを付加することなく，ユーザーに利用しやすい KETpic の環境を構築することが可能である．

3 Symbolic Thinkingとは

教材作成の視点からみると，数学的な概念形成や数学の理解の成立は重要であり，これらの過程に焦点をあてる必要がある．抽象と一般化は数学的な概念形成において決定的な役割を果たしており，認識論的視点からみても，これらの統合を図らなければ，数学的認識の更新や数学的な知の発見などありえない．1986 年に Dörfler は数学的活動の一般化モデルを提唱した（[9]，図 4 参照）．Dörfler によると，数学における具体的な活動（ここでは，教材作成による数学的な概念理解）がそのシステムの反省やその活動要素の記号化によって数学的対象に変換され，数学的操作の特性である外延的一般化を通

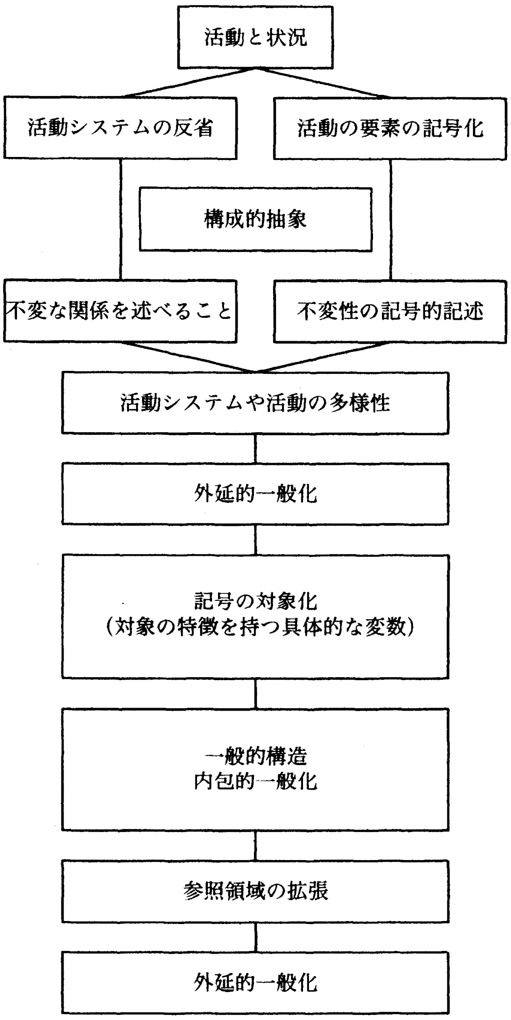

図 4. Dörfler の一般化モデル

して，記号そのものが対象化される．この過程を構成的抽象という．さらに，対象化された記号の特性である外延的一般化を通して，数学的対象の内包的一般化が成立する．内包的一般化はさらなる数学的活動を誘発し，参照領域を拡張し，数学的活動の一般化が繰り返される．つまり，教材作成による数学的な概念理解が深まり，より良い教材を作成できるようになる．

このように，Dörflerの一般化モデルにおいて，数学的な概念理解を深めるために記号が重要な役割を演じている．Peirceは幾何図形の記号に対して以下の3つの記号レベルを提唱した（[1]）．

(1) 類似記号（Icon）
記号そのものに表意作用があり，記号と対象（Object）が直接結びつく．

(2) 指標記号（Index）
記号そのものに表意作用はなく，記号と対象の対応関係が意味を与える．

(3) 象徴記号（Symbol）
記号と対象の対応関係によって意味が成立するわけではなく，記号と対象の間に解釈（Interpretation）が入り，その解釈に基づいて意味が生起する．ただし，その解釈は習慣に依存するため,「わたし」の解釈ではなく,「われわれ」に共有の解釈となる．そのため，共有された意味は外延を持つ（図5参照）．

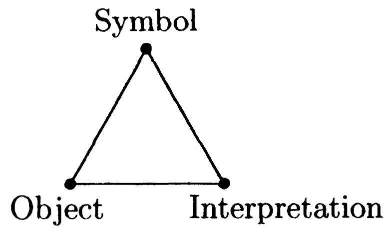

図5. 象徴記号の意味

Dörflerの一般化モデルに現れる記号のレベルは象徴記号であり（記号の対象化），それらの共有された意味は外延を持つため，内包的一般化に到達できる．これは，前節で述べた数式処理の能力のうち,「数式を象徴記号として表象する能力」で達成できる．

では，Dörflerの一般化モデルにおける構成的抽象や内包的一般化に到達することを推進しているものは何だろうか．それは，概念理解におけるメタ認知である．ここで，メタ認知とは,「認知についての思考（thought about cognition)」または「考えることについて考えること（thinking about thinking)」である．1979年にSkempは，概念理解におけるメタ認知をディレクターシステムとして特徴づけている（[8]）．図6のように，直観的知能Δ_1によって，数学的対象から情報の享受（information）や数学的活動（action）により，心的対象（schema）を変容する．さらに，反省的知能Δ_2によって，Δ_1の機能を最も効果的にすると特徴づけている．しかし，Dörflerによると，Δ_2の活動する対象はΔ_1の心的対象に限らず，外的環境にある対象もあり得る．例えば，授業中に学生自らが考えつかなかった数学的な概念が現れたとき，学生に内在するΔ_2はこの

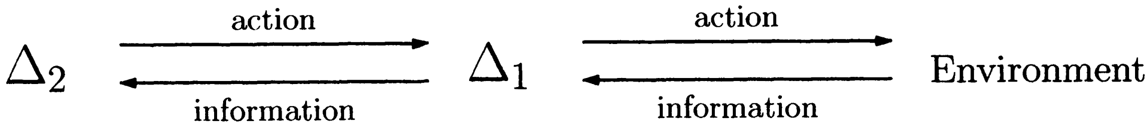

図6. Skempのディレクターシステム

概念（外的環境）と情報の享受や数学的活動を直接行う．つまり，Dörflerの一般化モデルにおいて，構成的抽象を推進するには内心理的メタ認知としてΔ_1が必要であり，外延的一般化を推進するには間心理的メタ認知としてΔ_2が必要である．

Symbolic Thinkingとは，CAS上で象徴記号そのものを使用してプログラムを組むことにより，ユーザーが数学の概念理解に関わる本質的な思考Δ_2（間心理的メタ認知）に集中できるようにすることである．

4　Scilab版K$_E$TpicへのSymbolic Thinkingの適用

Symbolic Thinkingに基づく教材作成を促進するために，Scilab版K$_E$Tpicでは以下の3つの能力を備えたコマンドを用意している．

(1) 数式のための象徴記号
(2) 象徴記号による計算
(3) 描画のための象徴記号

これらの能力について，例示しながら紹介しよう．

(1) 数式のための象徴記号

2次関数$y = x^2$のグラフをかくには，K$_E$Tpicコマンド**Plotdata**を用いればよい．Scialbコマンドdeffで関数$y = x^2$を定義して，グラフをかくと

```
deff('y=F(x)','y=x^2');
G1=Plotdata(F,'x');
Windisp(G1)
```

となり，図7が表示される．しかし，上記2行目のFでは，関数の式が直接表示されていないため分かりにくく，教材作成のためのSymbolic Thinkingの妨げとなる．そこで

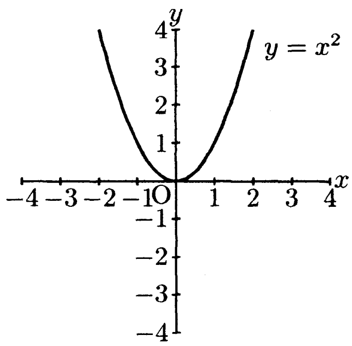

図7. $y = x^2$ **のグラフ**

```
G1=Plotdata('x^2','x');
Windisp(G1)
```

とすることにより，関数の式x^2が明確になり，教材作成のためのSymbolic Thinkingがしやすくなる．

(2) 象徴記号による計算

関数$y = ax^2 + bx + c$の係数bを変化させると，グラフはどのように変化するかを調べるには，K$_E$Tpicコマンド**Assign**を用いて，係数a, b, cに数値を割り当てればよい．$a = c = 1$とするとき，$b = -2, 0, 2$と変えてグラフをかくと

```
A=1;C=1;
```

```
G1=list();
for B=[-2,0,2]
  Tmp1=Plotdata(Assign('A*x^2+B*x+C',...
       'A',A,'B',B,'C',C),'x');
  G1=lstcat(G1,Tmp1);
end;
Windisp(G1)
```

となり，図8が表示される．KETpic コマンド **Assign** によって，変数を代入するイメージが生起し，教材作成のための Symbolic Thinking がしやすくなる．

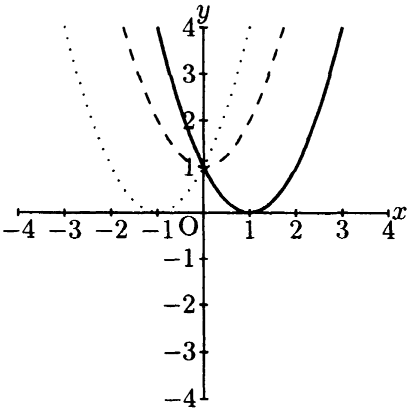

図8. $y = ax^2 + bx + c$ **のグラフ**

(3) 描画のための象徴記号

微分方程式 $y' = y$ の解を求めるためには，Scilab コマンド ode を用いればよい．

```
function ydot=f(t,y)
  ydot=y;
endfunction;
y0=1;t0=0;t=0:0.5:5;
y=ode(y0,t0,f,f);
G1=[0,1];
for N=2:100
  G1=[G1;N*0.05,y(N)];
end;
Windisp(G1)
```

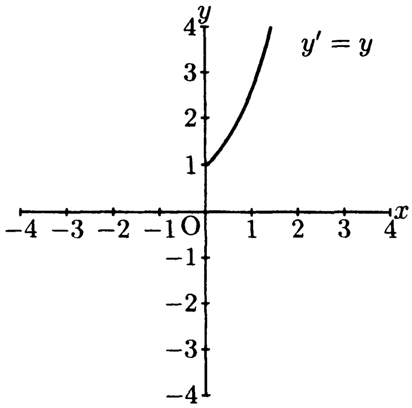

図9. ode による解曲線

とすると，図9が表示される．しかし，微分方程式の形もわかりづらく，左側半分も表示させるにはどうしたらよいかわかりづらいため，教材作成のための Symbolic Thinking の妨げになる．

一方，KETpic コマンド **Deqplot** を用いて，微分方程式の解を求めることができる．

```
G1=Deqplot('y`=y','x',0,1,'N=100');
Windisp(G1)
```

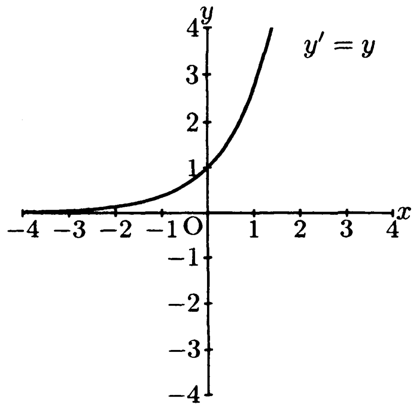

図10. Deqplot による解曲線

とすると，図10が表示される．KETpic コマンド **Deqplot** では，微分方程式の形 y`=y や初期条件「$x = 0$ のとき $y = 1$」が明確であるため，教材作成のための Symbolic Thinking がしやすくなる．

5 まとめと今後の課題

KETpicを利用すると，LaTeX文書に正確で美しい図をたやすく挿入できることや，線画で表現するため大量に印刷しても画質が低下しないことから，KETpicが数学教育用印刷配付教材の作成に適しているといえる．教材作成の際にKETpicを利用するとき，CASの数式処理（Symbolic Calculation）の能力すべてが必要であるとこれまで考えられていた．しかし，最近では，数式処理の能力のうち,「数式を象徴記号として表象する能力」が備わっていれば十分であることがわかってきた．そのため，教材作成においては，本来のCASではないMatlab, Scilab, RなどのマクロパッケージであるKETpicでも，Maple, Mathematica, Maximaなどの本来のCAS版KETpicと遜色なく利用できる．

このことを認知科学的側面から分析するため，Symbolic Thinkingという概念を提唱した．教材作成において，教師が数学的な概念理解を深め，より良い教材を作成していくことが求められている．この作成過程を表したモデルの一つとして，Dörflerの一般化モデルを紹介した．Dörflerによると，教材の題材となる数学的対象をPeirceの提唱した象徴記号で表現し（構造的抽象），象徴記号を対象とすることで数学的対象に関する概念理解が深まり（内包的一般化），参照領域を拡張し，さらに構造的抽象と内包的一般化が繰り返され，概念理解が深まっていく．この一般化の過程を推進していくものは，概念理解におけるメタ認知である．概念理解のメタ認知システムとして紹介したSkempのディレクターシステムに基づいて，教材作成過程のメタ認知システムを考察すると，構造的抽象を推進するのは直観的知能（内心理的メタ認知）であり，内包的一般化を推進するのは反省的知能（間心理的メタ認知）であることがわかる．以上のことを踏まえると，Symbolic Thinkingを次のように定義できる：

> Symbolic Thinkingとは，CAS上で象徴記号そのものを使用してプログラムを組むことにより，ユーザーが数学の概念理解に関わる本質的な思考（すなわち，間心理的メタ認知）に集中できるようにすることである．

我々は，Symbolic Thinkingを深く行えば行うほど，教師が数学の概念理解を深められると考えて，次のスローガンを提唱している．

> The More Symbolic Thinking, the Better Understanding.

実際にScilab版KETpicを用いて，KETpicコマンドがSymbolic Thinkingしやすい環境を提供している3つの事例を紹介した．

最後に，今後の課題を列挙すると以下の通りである．

1. 教材作成のためのSymbolic Thinkingしやすい環境が構築できるように，KETpicコマンドをどのような象徴記号で表象していくべきか検討する．
2. Symbolic Thinkingに基づく教材作成によって，教師がより高度な数学的な概念理解を獲得していく過程の詳細を明らかにする．
3. Symbolic Thinkingに基づく教材作成により作成された教材を通して，学生がより高度な数学的な概念理解を獲得していく過程を明らかにする．

参考文献

[1] 米盛裕二：『パースの記号学』，勁草書房，1981.

[2] 山下哲，関口昌由，高遠節夫：「Mapleによる図形描画用TEXファイルの作成について」，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.13, No1, pp.31–40, 2006.

[3] 山下哲，阿部孝之，金子真隆，関口昌由，田所勇樹，深澤謙次，高遠節夫：「KETpicの改良と教育利用」，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.14, No1, pp.51–60, 2007.

[4] 高遠節夫，阿部孝之，泉源，金子真隆，北原清志，関口昌由，深澤謙次，山下哲：「授業効果を高める挿図教材の作成」，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.15, No1, pp.109–118, 2008.

[5] 金子真隆, 阿部孝之, 関口昌由, 山下哲, 高遠節夫:「KETpicによる曲面描画と教育利用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.1-10, 2009

[6] 金子真隆, 阿部孝之, 山下哲, 泉源，深澤謙次，北原清志，高遠節夫:「線形代数の教科書における挿図の利用について–KETpic 利用の可能性を中心に–」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.12-25, 2010

[7] 北原清志, 阿部孝之, 金子真隆，山下哲, 高遠節夫:「全微分における図入り教材の作成例とその研究授業報告」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.132-145, 2010

[8] Skemp, R.R.: "Intelligence, learning and acyion: A foundation for theory and practice in education", New York, John Wiley & Sons, 1979.

[9] Dörfler W.: "The cognitive distance between material actions and mathematical operations", in Proceedings of the 10th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, London, England, pp.147–152, 1986.

[10] Sekiguchi M., Yamashita S., & Takato S.: "Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine TEX-Pictures", ICMS 2006, LNCS 4151, pp.24–34, Springer-Verlag, 2006.

[11] Kaneko M., Abe T., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Fukazawa K., Yamashita S. & Takato S.: "CAS-aided Visualization in LATEX documents for Mathematical Education", Teaching Mathematics and Computer Science (ISSN 1589-7389), Vol. VIII, Issue I, pp.1–18, 2010